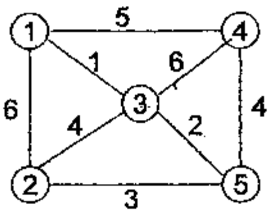
2006 年度 アルゴリズム論・試験問題

問題 1 以下の重み付きグラフの全点対間最短路を Floyd-Warshall のアルゴリズムを用いて求めることを考える．



頂点 $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$ および正の整数 m について，

$d_{i,j}^{(m)}$ = すべての中間頂点が m 以下であるような頂点 i から頂点 j へ至る道の中で重みの和が最小の道の重みとする． 但し，そのような道がないときは，∞ とする．

と定義する．ただし，$d_{i,i}^{(0)}$ は 0 とする．また，$d_{i,j}^{(m)}$ を第 i 行 第 j 列の成分とする行列を $D^{(m)}$ とする．

(1) $d_{i,j}^{(0)}$ は一般にどのようにして求められるか．

(2) 一般に頂点の個数 n のグラフにおいて，$D^{(m)}$ の要素と $D^{(m-1)}$ の要素の間になりたつ関係式を求めよ．

(3) ~~(1)~~(2) で得た関係式により，最短経路の重みを求めることができる．最短経路を求めるには，さらにどのような工夫が必要か．簡潔に示せ．

(4) 上記のグラフについて，$D^{(0)}, D^{(1)}, D^{(2)}$ を順次求めると，$D^{(2)}$ が以下のように計算された．

$$D^{(2)} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 5 & 9 \\ 6 & 0 & 4 & 11 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 11 & 6 & 0 & 4 \\ 9 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

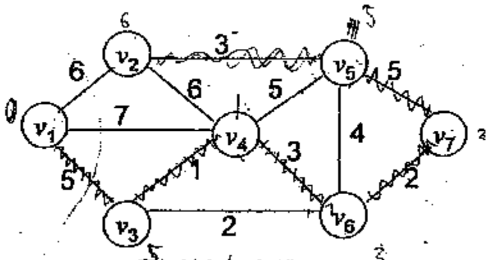
この計算結果をもとにして，~~(1)~~(2) で求めた式を用いて $d_{1,5}^{(3)}$, $d_{2,5}^{(3)}$ を求めなさい．ただし，実際に ~~(1)~~(2) で求めた式に値を代入して計算し，その途中経過も示すこと．答だけを書いたものについては点数を与えない．

(5) グラフで表されるネットワークを考える．各辺 (x, y) には，頂点 x から頂点 y へデータを送信する際に，正しくデータを送信できる確率 $w(x, y)$ が与えられている．また，これらの確率は独立であるとする．このとき，任意の頂点から任意の頂点へデータを送信する際に，最も信頼できるデータ送信経路を求めるには，Floyd-Warshall のアルゴリズムの関係式をどのように変更したらよいか?

問題は裏に続きます

問題 2 次の Prim のアルゴリズムと重み付き無向グラフ G に対して以下の設問に答えよ．ただし，V を G の頂点集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ とする．また，辺は，$\{v_1, v_2\}$ のように，辺の端点 2 つの要素からなる集合で表すことにする．

```
 1. 任意に選んだ頂点 r のキーの値を 0,
    それ以外の頂点のキーの値を∞として,
    プライオリティキュー Q を構成する.
 2. parent[r] = NIL;
 3. while(Q!=φ){
 4.   u = EXTRACT-MIN(Q);
 5.   for each v in Adj[u] do
 6.     if( v in Q かつ w(u,v) < key[v]){
 7.       parent[v] = u;
 8.       key[v] = w(u,v);
 9.     }
10.   end
11. }
```



重み付き無向グラフ G

ここで，w(u,v) は辺 $\{u, v\}$ の重みを表し，EXTRACT-MIN は，プライオリティキューから最小のキーを持つ要素を抽出する操作であり，Adj[u] は頂点 u が隣接する頂点の集合を表す．

(1) $V' = \{v_1, v_2, v_7\}$ とし，カット $C = (V', V - V')$ を考える．C と交差する辺をすべて枚挙せよ．

(2) 上記のカット C に対する軽い辺を求めよ．

(3) 辺集合 $A = \{\{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$ を侵害しないカットをすべて求めよ．

(4) グラフ G に対して Prim のアルゴリズムを適用することを考える．このとき，以下の空欄を埋めよ．

1 行目で r として v_1 が選ばれたとする．このとき，最初に 4 行目で u として選ばれるのは，頂点 v_1 である．そして，5〜9 行目の設定の結果，key[v_2] = $\boxed{\text{(a)}}$ 6，key[v_3] = $\boxed{\text{(b)}}$ 5，key[v_4] = $\boxed{\text{(c)}}$ 7 となる．よって，次に 4 行目で u として選ばれるのは，頂点 $\boxed{\text{(d)}}$ である．この u に対して，5〜9 行目の設定の結果，key[v_4] = $\boxed{\text{(e)}}$ 1，key[v_6] = $\boxed{\text{(f)}}$ 2 となる．その後，4 行目で u として選択される頂点は，$\boxed{\text{(g)}}$，$\boxed{\text{(h)}}$，$\boxed{\text{(i)}}$，$\boxed{\text{(j)}}$，$\boxed{\text{(k)}}$ という順番になる．

(5) 上記 (4) の実行の結果得られる parent の情報をすべての頂点に対して記せ．

問題 3 チョムスキー標準形の文脈自由文法 $G = (N, \{a, b\}, P, S)$ を考える．ただし，

$$
\begin{aligned}
N &= \{S, A, B, C, X\}, \\
P &= \{\ S \to AX,\ X \to BC,\ B \to AX,\ B \to b,\ C \to AA,\ A \to a\ \}
\end{aligned}
$$

とする．文字列 $w = a_1 \cdots a_n$ $(a \in \Sigma)$ が G によって生成されるかどうかを Cocke-Kasami-Younger のアルゴリズムを用いて検査する問題を考える．$X \Rightarrow^* a_j \cdots a_{j+i-1}$ となるような非終端記号 X の集合を $C_{i,j}$ で表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $S \Rightarrow^* aaabx$ となる $x \in \{a, b\}^*$ はどのような記号列か．

(2) G が生成する言語はどのような言語か．簡潔に説明しなさい．

(3) $C_{1,j}$ はどのように求められるか．$C_{1,j}$ を求める式を書け．

(4) $C_{i,j}$ を再帰的に求めるための式を書け．

(5) この G に対して，(3),(4) の解法を適用したとき，記号列 $w = abaa$ に対する解析行列 $(C_{i,j})$ (第 i 行第 j 列成分を $C_{i,j}$ とする行列) を解答用紙上に完成させよ．