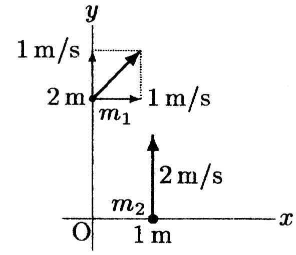
力学第二 試験 (2002年12月21日実施) 略解

【答案は，紙面の許す範囲内で導出過程を論理的に記すこと．式だけでなく説明を文章で書くこと.】
→ 正しい結果が書いてあっても導出がなければ正解と認めない.



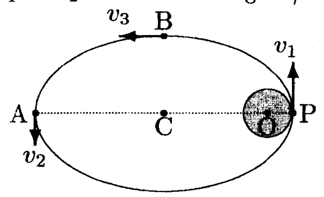
1. 質量 $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1.5\,\mathrm{kg}$ の2つの粒子が一定速度で運動している．ある瞬間における位置と速度を図に表す.

   (a) この瞬間における質量中心の位置座標を求めよ. (10 点)
   質量中心の座標を (X, Y) とすると $X = \dfrac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \dfrac{1\,\mathrm{kg}\times 0\,\mathrm{m} + 1.5\,\mathrm{kg}\times 1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{kg}+1.5\,\mathrm{kg}} = 0.6\,\mathrm{m}$,
   同様に $Y = \dfrac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \dfrac{1\,\mathrm{kg}\times 2\,\mathrm{m} + 1.5\,\mathrm{kg}\times 0\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{kg}+1.5\,\mathrm{kg}} = 0.8\,\mathrm{m}$

   (b) 質量中心の速度 (x 成分と y 成分) を求めよ. (10 点)
   質量中心の速度を (V_x, V_y) とすると $V_x = \dfrac{\sum m_i v_{ix}}{\sum m_i} = \dfrac{1\,\mathrm{kg}\times 1\,\mathrm{m/s} + 1.5\,\mathrm{kg}\times 0\,\mathrm{m/s}}{1\,\mathrm{kg}+1.5\,\mathrm{kg}} = 0.4\,\mathrm{m/s}$,
   同様に $Y = \dfrac{\sum m_i v_{iy}}{\sum m_i} = \dfrac{1\,\mathrm{kg}\times 1\,\mathrm{m/s} + 1.5\,\mathrm{kg}\times 2\,\mathrm{m/s}}{1\,\mathrm{kg}+1.5\,\mathrm{kg}} = 1.6\,\mathrm{m/s}$

   (c) 全運動量の大きさを求めよ. (10 点)
   全運動量の大きさ $P = MV$, $M = 1\,\mathrm{kg} + 1.5\,\mathrm{kg} = 2.5\,\mathrm{kg}$, $V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2} = \sqrt{0.4^2 + 1.6^2}\,\mathrm{m/s} = 0.4\sqrt{17}\,\mathrm{m/s}$, 以上から $P = \sqrt{17}\,\mathrm{kg\cdot m/s} \cong 4.1\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ **【コメント】** 運動量の単位を J (エネルギーの単位) と間違えた者が若干名いた.

   (d) 全角運動量の大きさ求めよ. (10 点)
   m_1 の角運動量は $-z$ 方向，大きさは $L_1 = 1\,\mathrm{kg}\times 2\,\mathrm{m}\times 1\,\mathrm{m/s} = 2\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$, m_2 の角運動量は $+z$ 方向，大きさは $L_2 = 1.5\,\mathrm{kg}\times 1\,\mathrm{m}\times 2\,\mathrm{m/s} = 3\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$, 方向が逆向きなので全角運動量の大きさは L_1 と L_2 の差を取って $1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$.
   【コメント】 差を取る理由が書いてなければ正しい結果が書いてあっても 5 点.



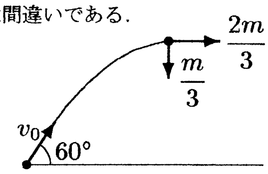
2. 楕円軌道の人工衛星について以下に答えよ．ただし地球の半径を R とすると，近点距離 $\overline{\mathrm{OP}} = R$, 遠点距離 $\overline{\mathrm{OA}} = 9R$ である．なお地球の質量 M と万有引力定数 G の積は重力加速度 g を使って $GM = gR^2$ と近似する．必要なら人工衛星の質量は m とせよ.

   (a) 近点 P における速度を v_1, 遠点 A における速度を v_2 とする．力学的エネルギーの保存則と面積速度保存則から出発して v_1 と v_2 を g と R を使って表せ. (15 点)
   力学的エネルギー保存則 $\dfrac{1}{2}m{v_1}^2 - \dfrac{GMm}{R} = \dfrac{1}{2}m{v_2}^2 - \dfrac{GMm}{9R}$, 面積速度保存則 $\dfrac{1}{2}Rv_1 = \dfrac{1}{2}(9R)v_2$. 第1式に $GM = gR^2$ を代入して整理すると $v_1^2 - v_2^2 = \dfrac{16}{9}gR$ を得る．第2式より $v_1 = 9v_2$. 以上から $v_1 = \dfrac{3}{5}\sqrt{5gR}$, $v_2 = \dfrac{1}{15}\sqrt{5gR}$ を得る.
   【コメント】 $GM = gR^2$ に言及しない解答は減点した.

   (b) 楕円の短径上の地点 B における速度 v_3 を v_1 を使って表せ. (10 点)
   近点距離 $r_1 = R$, 遠点距離 $r_2 = 9R$ を使うと楕円の短半径は $\sqrt{r_1 r_2} = 3R$ である (図の $\overline{\mathrm{BO}} = 5R$ (長半径), $\overline{\mathrm{CO}} = 4R$ を使って求めてもよい). B 点と P 点の面積速度を等しいと置くと $Rv_1/2 = (3R)v_3/2$, したがって $v_3 = v_1/3$.
   【コメント】 $3R$ の導出が必要．B 点の面積速度は $(5R)v_3/2$ ではない．力学的エネルギー保存則を用いて求めることもできる.

   (c) 運動の周期 T を g と R を使って表せ. (10 点)
   周期 T は楕円の面積 $\pi(3R)(5R)$ を面積速度 $Rv_1/2$ で割って求める．$T = \dfrac{15\pi R^2}{Rv_1/2} = 10\pi\sqrt{\dfrac{5R}{g}}$.
   【コメント】 $T^2 = (4\pi^2/GM)a^3$ を使って求めた場合は 5 点,

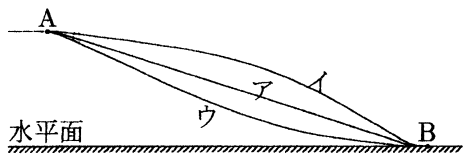
   (d) $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, $R = 6400\,\mathrm{km}$ として v_1 と T を数値計算せよ．なお $\sqrt{10} \cong \pi$ と近似してよい. (10 点)
   $6.4 = 8^2 \times 10^{-1}$, $9.8 = 2 \times 7^2 \times 10^{-1}$ に注意すると $v_1 = \frac{3}{5}\sqrt{7^2 \times 8^2 \times 10^5} = 60 \times 7 \times 8 \times \sqrt{10}\,\mathrm{m/s} = 1.06 \times 10\,\mathrm{m/s}$.
   $T = 10\pi\sqrt{\dfrac{5^2 \times 8^2 \times 10^6}{7^2 \times 10}}\,\mathrm{s} = \dfrac{40}{7}\dfrac{\pi}{\sqrt{10}} \times 10^4\,\mathrm{s} \cong 5.7 \times 10^4\,\mathrm{s} = 15.9$ 時間 (16 時間でもよい)
   【コメント】 有効数字 6 桁以上は正解としなかった．$\sqrt{2} \cong 1.4$ は正しいが $\sqrt{2} \cong 1.407890$ は間違いである.



3. 水平と角度 60° の方向に初速度 v_0 で打ち上げられた質量 m の物体が 最高点に達して水平飛行になった瞬間に質量 $m_1 = m/3$ と $m_2 = 2m/3$ の2つに分裂した．質量 m_1 の方は速度を失い，鉛直に落下した.

   (a) 質量 m_2 の方の分裂直後の速度を求めよ. (10 点)
   水平方向の速度は $v_0 \cos 60° = v_0/2$. 分裂の前後における運動量保存則 $m\dfrac{v_0}{2} = \dfrac{m}{3}\cdot 0 + \dfrac{2m}{3}\cdot v_2$ より $v_2 = \dfrac{3}{4}v_0$.
   【コメント】 運動エネルギーは保存しない．分裂するにはエネルギーが必要である.

   (b) 分裂直後の重心運動の運動エネルギーと相対運動の運動エネルギーを求めよ. (10 点)
   重心速度 $\dfrac{v_0}{2}$ は不変であるから重心運動の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{v_0}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{8}m{v_0}^2$. 分裂直後の運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}\dfrac{2m}{3}\left(\dfrac{3v_0}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{16}m{v_0}^2$. これから重心運動の運動エネルギーを引けば相対運動の運動エネルギー $\dfrac{3}{16}m{v_0}^2 - \dfrac{1}{8}m{v_0}^2 = \dfrac{1}{16}m{v_0}^2$ を得る.
   【コメント】 分裂後の運動エネルギーは相対運動の運動エネルギーの分だけ増加している.



4. 図のような3つの滑らかな斜面がある．A 点から静かに物体を滑らすとき B 点に到達するまでの所要時間に関して次のどれが正しいか．記号を選んで理由を述べよ (論理的な文章を書くこと).
   (a) すべて同じである．　(b) ほぼ直線の「ア」が最も短い.
   (c) 最も急な傾斜のある「イ」が最も短い．　(d) 下側を通る「ウ」が最も短い. (10 点)

傾斜があまり急でなければ経路の長さの差は小さいので，滑り始めた直後の傾斜が急で初期の速さが速い方が所要時間は短い．つまり正解は (d) である．水平と傾き θ の斜面を初速度 0 で滑り出したとき水平方向に x 滑った (鉛直方向に $x\tan\theta$ 降下した) ときの速さは $v = \sqrt{2gx\tan\theta}$, 水平方向の速さは $v\cos\theta = \sqrt{gx\sin 2\theta}$, つまり 45° 以内ならば急な斜面の方が水平方向の移動速度が速い.
【コメント】 所要時間を問うているのだから距離と速さに言及しなければ理由にならない.「力学的エネルギーが保存するので所要時間は等しい」という間違いが多かったが，これは「地上のすべての木は同じ重力加速度を受けるのでその高さはみな等しくなる」と言うようなものである．エネルギーや仕事が所要時間に関係ないことは，例えば同じ量の仕事をする (エネルギーを使う) にしても人により所要時間が違うことを考えれば明らかではないか.