

## 工学基礎演習第二 【期末試験】

2005. 2. 12 (Sat) 1 限 実施

### 1 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について次の問いに答えよ.

- (1)  $W_1, W_2$  の基底および次元を求めよ.
- (2)  $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$  の基底および次元を求めよ.

### 2 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ および $\mathbb{R}^3$ の基底 $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ について, 次の問

いに答えよ. 但し,  $\mathbb{R}^3$  の標準基底を  $\mathcal{E}$  で表す.

- (1)  $\mathcal{E}$  から  $B$  への基底の変換行列  $P$ , および  $B$  から  $\mathcal{E}$  への基底の変換行列  $Q$  を求めよ.
- (2)  $T(x) = Ax$  ( $x \in \mathbb{R}^3$ ) により  $\mathbb{R}^3$  の線形変換  $T$  を定めるとき,  $T$  の基底  $\mathcal{E}$  に関する表現行列  $B$ , および基底  $B$  に関する表現行列  $C$  を求めよ.
- (3) 基底  $B$  の 3 つのベクトルの中に  $T$  の固有ベクトルとなるものはあるか. あるならばそれをすべて挙げよ.

### 3 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1)  $A$  の固有多項式  $g_A(t)$  および 固有値  $\lambda$  を求めよ.
- (2) 各固有値  $\lambda$  について固有空間  $W(\lambda; A)$  を求めよ.
- (3)  $A$  が対角化されるか調べ, 対角化できるならば対角化せよ.

### 4 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ , および $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ に対して次の問いに答えよ.

- (1)  $W$  の直交補空間  $W^\perp$  の基底を求めよ.
- (2)  $W$  の正規直交基底を求めよ.
- (3)  $a$  を  $a = b + c$  ( $b \in W, c \in W^\perp$ ) の形に表せ.