

工学基礎演習第二 【期末試験】

2006. 2. 18 (Sat) 1 限 実施

1. 線形写像 $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を $T(x) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x$ ($x \in \mathbb{R}^5$) により定める.

- (1) T の核 $\text{Ker}(T)$ の基底と次元を求めよ.
- (2) T の像 $\text{Im}(T)$ の基底および T の階数 $\text{rank}(T)$ を求めよ.

2. 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ および $\mathbb{R}^3$ の基底 $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ について, 次の

問いに答えよ. 但し, $\mathbb{R}^3$ の標準基底を $\mathcal{E}$ で表す.

- (1) $\mathcal{E}$ から B への基底の変換行列 P , および B から $\mathcal{E}$ への基底の変換行列 Q を求めよ.
- (2) $T(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^3$) により $\mathbb{R}^3$ の線形変換 T を定めるとき, T の基底 $\mathcal{E}$ に関する表現行列 B , および基底 B に関する表現行列 C を求めよ.
- (3) 基底 B の 3 つのベクトルの中に T の固有ベクトルとなるものはあるか. あるならばそれをすべて挙げよ.

3. 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A の固有多項式を求めよ.
- (2) A の固有値を求め, 各固有値の固有空間を求めよ.
- (3) 行列 A を対角化せよ.

4. $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ に対して次の問いに答えよ.

- (1) W の直交補空間 $W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid (u, v) = 0 \ (\forall v \in W)\}$ の基底を求めよ.
- (2) Schmidt の直交化法を用いて W および $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.