

微分積分学第一

2006年8月2日実施・昼間主E1・試験時間80分

以下の各問いに答えよ。解答は別紙，解答用紙に記すこと。また，解答のはじめに必ず問題番号を書き，どの問題の解答であるかを明示した上で，明瞭に解答を書き記すこと。不明瞭なものには加点しない。

1 集合 $A = \{1 + \frac{1}{n} | n = 1, 2, 3, \dots\}$ とするとき， $\max A$ ， $\min A$ ， $\sup A$ ， $\inf A$ を求めよ。ただし，もし存在しなければ，存在しないと答えよ。

2 方程式 $\text{Cos}^{-1} x = \text{Tan}^{-1} \sqrt{3}$ を解け。

3 $f(x) = 2 \text{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \text{Sin}^{-1} x$ ($-1 < x < 1$) とするとき，以下の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
- (2) $f'(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ を求めよ (もっと簡単な式にせよ)。

4 関数 $\exp(x^x)$ の導関数を求めよ。

4 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{x^2 + x}\right)^{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right\}$$

5 次の関数の漸近展開を， $o(x^5)$ を用いて書き表せ。(各10点，計20点)

$$(1) \log(1+x) \quad (2) \frac{1}{1+x}$$

6 次の不定積分をもとめよ。

$$(1) \int \frac{2x}{(x-1)^2(x^2+1)} dx \quad (2) \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{1-x^2}} \quad (3) \int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$$

7 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ($s > 0$) をガンマ関数とする。 $\Gamma(3)$ を求めよ。

8 次の広義積分は，収束するか，発散するか，理由をつけて，答えよ。

$$(1) \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx \quad (\text{ヒント } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のときの } \frac{2}{\pi}x \text{ と } \sin x \text{ の大小比較})$$

$$(2) \int_0^\infty e^{-x^2} dx \quad (\text{ヒント } 1 \leq x \text{ のときの } e^{-x^2} \text{ と } e^{-x} \text{ の大小比較})$$