応用代数学

2012 年 2 月 20 日実施

以下の各問いに答えよ．解答は別紙，解答用紙に記すこと．また，解答のはじめに必ず問題番号を書き，どの問題の解答であるかを明示した上で，明瞭に解答を書き記すこと．不明瞭なものには加点しない．

複素数を成分とする 3 次正方行列の全体の集合 $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ は，講義でやったように，通常の和と，（複素数をスカラーとする）通常のスカラー倍で線形空間になる．更に，講義でやったように括弧積（ブラケット積，交換子積ともいう）を定めれば，リー代数になる．これを認めた上で，以下の問に答えよ．

$(\lambda I - M(ad(H)))X=0$

はじめに，$\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ の部分集合 $\mathfrak{g}$ を，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(3,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{C}) | X + {}^tX = 0\}$$

で定める．

(1) $\mathfrak{g}$ が，線形空間 $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ の部分線形空間となることを示せ．

以下では，$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．

(2) E_1，E_2，E_3 が一次独立であることを示せ．

(3) E_1，E_2，E_3 が線形空間 $\mathfrak{g}$ の基底であることを示せ．

(4) $\mathfrak{g}$ が，リー代数 $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{C})$ の部分リー代数となることを示せ．

$$\begin{array}{r} 17 \\ -\ 8 \\ \hline 9 \end{array}$$

(5) $X = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 \\ -x_1 & 0 & x_3 \\ -x_2 & -x_3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}$，$Z = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ -z_1 & 0 & z_3 \\ -z_2 & -z_3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}$ とするとき，
$\mathrm{ad}(X)(Z)$ を求めよ．

$[X, Z]$

(6) $\mathrm{ad}(X)$ の基底 $\{E_1, E_2, E_3\}$ に関する表現行列 $M(\mathrm{ad}(X))$ を求めよ．

$ad(X)(E_1)$
$ad(X)(E_2)$

(7) $Y = \begin{bmatrix} 0 & y_1 & y_2 \\ -y_1 & 0 & y_3 \\ -y_2 & -y_3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}$ とするとき，キリング形式 $B(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y))$ を求めよ．

$Tr(M(ad(X))M(ad(Y)))$
Tr = 対角成分の和

(8) $X \in \mathfrak{g}$ とする．任意の $Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$B(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\,\mathrm{ad}(Y)) = 0$ となるとき，$X = 0$ となることを示せ．

$ad(X)=0$ と
なるから

以下では，$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, h \in \mathbb{C} \right\}$ とする．

(9) $\mathfrak{h}$ が，線形空間 $\mathfrak{g}$ の部分空間となることを示せ．

(10) $\mathfrak{h}$ が，リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分代数となることを示せ．

(11) $H = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とするとき，$\mathrm{ad}(H)$ の基底 $\{E_1, E_2, E_3\}$ に関する表現行列 $M(\mathrm{ad}(H))$ を求めよ．

(12) $M(\mathrm{ad}(H))$ の固有値を求め，各固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(13) 集合 $\{M(\mathrm{ad}(H)) \mid H \in \mathfrak{h}\}$ に属する行列を，正則行列 P を使って，同時対角化せよ．また，このときの P も答えよ．

以下では，線形写像 $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ に対し，

PHP^{-1}
逆が

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X, \ \forall H \in \mathfrak{h}\}$$

とおく．

(14) $\mathfrak{g}_\alpha$ が $\mathfrak{g}$ の部分線形空間であることを示せ．

以下では，$\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ となる，0 でない線形写像 $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ 全体の集合を $\triangle$ とする．
（つまり，$\triangle$ で，0 でないルート全体の集合を表すとする．）

(15) $\triangle$ に属する線形写像 $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ をすべて求めよ．
（つまり，$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート $\alpha : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ をすべて求めよ．）

(16) $\triangle$ の各元 α に対し，$\mathfrak{g}_\alpha$ の 0 でない元を一つ答えよ．

(17) $\mathfrak{h}$ に関するルート分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \oplus_{\alpha \in \triangle} \mathfrak{g}_\alpha$$

を求め，各 $\mathfrak{g}_\alpha$ の基底を求め，$\mathfrak{h}$ が，リー代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数となっていることを示せ．
（半単純リー代数の元 X' に対し，X' が対角化可能であることと，$\mathrm{ad}(X')$ が対角化可能であることが同値であることを使ってよい．）