「応用解析Ａ」試験問題（平成１７年７月２５日実施）

電卓使用不可

（注意）下記の問題文で太文字はベクトルを示す

［１］ベクトル$\boldsymbol{f}=(f_x, f_y, f_z)$とする。（２）～(3)については$x, y, z$成分を書け。

(1) div $\boldsymbol{f}$

(2) rot $\boldsymbol{f}$

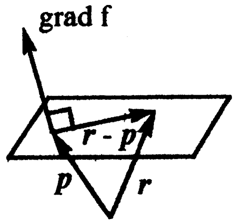
(3) 半径aの円周上を動く点Ｐの位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$, $\theta=\theta(t)$としたとき、点Ｐの面積速度 $(1/2)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$を求めよ。ただし、$\boldsymbol{v}$は点Ｐの速度ベクトルである。

(4) grad と div の違いについて述べよ。また、$\nabla=(\partial/\partial x)\ \boldsymbol{i}+(\partial/\partial y)\ \boldsymbol{j}+(\partial/\partial z)\ \boldsymbol{k}$についても grad と div の関連で説明せよ。

［２］位置ベクトル$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$のとき、次の関係式(1)～(4)を証明せよ。

(1) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}=3$,　(2) $\nabla|\boldsymbol{r}|=\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$,　(3) $\nabla(1/|\boldsymbol{r}|)=-\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3$,　(4) $\mathrm{div}(\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|^3)=0$

［３］曲面$f=yz+zx+xy=0$上の点$P(2, -1, 2)$における接平面の方程式を次の手順で求めよ。



(1) grad fを求めよ。なお、grad fは曲面の法線ベクトルになる。

(2) 点Ｐにおける法線ベクトルを求めよ。

(3) 接平面上の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}=(x, y, z)$、原点から点Ｐに至るベクトルを$\boldsymbol{p}$とすれば、$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}$が法線と直交する条件から、接平面の方程式を求めよ。

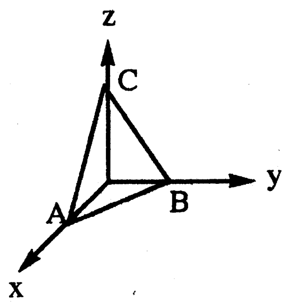
［４］円柱らせん　$C: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt\ (0\leqq t\leqq\pi)$のとき、

$\int_C (x+y+z)ds$を求めよ。ただし、sは弧長を表し、

$$ds=[(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2]^{1/2}\ dt$$

を使え。a, bは定数である。

［５］右の平面$2x+2y+z=2$が座標軸と交わる点Ａ，Ｂ，Ｃを結ぶ線分で囲まれた三角形をSとするとき、$f=x^2+2y+z-1$とすると面積分$\iint_S f\,dS$を求めよ。但し$z=\phi(x, y)$とすると



$$dS=[(\partial\phi/\partial x)^2+(\partial\phi/\partial y)^2+1]^{1/2}\ dxdy$$を使え。

［６］$x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=2$で囲まれた立体をV、その表面をSとする。ベクトル$\boldsymbol{f}=(x^2yz, xy^2z, xyz^2)$対して、ガウスの定理（任意のベクトル$\boldsymbol{A}$に対して$\iint_S \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{n}\,dS=\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV$）を用いて、$\iint_S \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{n}\,dS$を求めよ。但し、$S$の法線ベクトル$\boldsymbol{n}$は外向きにとる。