2006年2月17日

2005年度応用解析B（金森）：期末試験問題

1.1 表1の(ア)～(コ)の性質を説明せよ。

表1 ラプラス変換の一般公式

(ア) $F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$	(カ) $L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$
(イ) $L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+bL\{g(t)\}$	(キ) $f(t)=L^{-1}\{F(s)\}$
(ウ) $L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$	(ク) $L(f')=sL(f)-f(0)$
(エ) $L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{s}L\{f\}=\frac{1}{s}F(s)$	(ケ) $L\{tf(t)\}=-F'(s)$
(オ) $(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $L(f*g)=L(f)L(g)$	(コ) $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(\tilde{s})d\tilde{s}$

1.2 表2はフーリエ級数、フーリエ積分、フーリエ変換の公式をまとめたものである。

(1) (a)～(c)、(ア)～(ウ)に適切な語句を埋めよ。

(2) (a)と(b)の適用対象の違いについて説明せよ。

(3) (b)と(c)の機能の違いについて説明せよ。

(4) (ア)と(イ)の各公式の適用対象の違いについて説明せよ。

(5) 公式$f(x)$, $\hat{f}(w)$の物理的解釈について説明せよ。

表2 フーリエ級数、フーリエ積分、フーリエ変換の関連公式

フーリエ	(a)	(b)	(c)
実数	$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^\infty\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$ $a_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$ $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$ $b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$	$f(x)=\int_0^\infty[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]dw$ $A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos wv dv$ $B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin wv dv$	
(ア)	$f(x)=\sum_{n=1}^\infty b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$	$f(x)=\int_0^\infty B(w)\sin wx dw$ $B(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\sin wv dv$	$\hat{f}_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx dx$ $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(w)\sin wx dw$
(イ)	$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^\infty a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$ $a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$ $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$	$f(x)=\int_0^\infty A(w)\cos wx dw$ $A(w)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos wv dv$	$\hat{f}_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$ $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(w)\cos wx dw$
(ウ)	$f(x)=\sum_{n=-\infty}^\infty c_n e^{in\pi x/L}$ $c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-in\pi x/L}dx$	$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{iw(x-v)}dvdw$	(5) $\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}dx$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(w)e^{iwx}dw$

1.3 2階の線形偏微分方程式の(ア)名称をひとつ挙げ、(イ)方程式の形、(ウ)、付加条件について説明せよ。また、(エ)応用例を挙げよ。

2.1 次式の逆ラプラス変換を求めよ。

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+5}\right]$$

2.2 1周期が次式で与えられる $f(x)$ のフーリエ級数を求め、第3項まで書き出せ。

$$f(x)=\begin{cases}1 & (-\pi<x<0)\\ -1 & (0<x<\pi)\end{cases}$$

2.3 次の関数 $f(x)$ フーリエ変換を求めよ。

$$f(x)=1 \quad (-a\le x<a)$$

3.1 次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

$$y''+3y'+2y=e^{2t},\ y(0)=0,\ y'(0)=1$$

3.2 次の周期関数のフーリエ級数を求め、第４項まで書き出せ。

$$f(x)=x \quad (-1\le x<1)$$

表 3 ラプラス変換表

$f(t)$	$F(s)=L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$\sin wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$