

情報理論試験問題 (夜間主コース)

以下の問題に答えなさい。ただし問題 3 と 4 はそのうち一題を選択しなさい。対数の底は 2 とする。近似計算はする必要はない。

1. (a) 確率が $p_X(0) = 1 - p_X(1) = 1/3$ で与えられる二元確率変数 X のエントロピーを計算せよ。
 (b) 二元確率変数 Y は X に関係し, 以下の表に与える条件付確率 $p_{Y|X}(y|x), y \in \{0, 1\}, x \in \{0, 1\}$ に従って分布するものとする。相互情報量 $I(X; Y)$ を計算せよ。

$x \backslash y$	0	1
0	3/4	1/4
1	1/4	3/4

- (c) 入力記号 $x \in \{0, 1\}$ に対して出力記号 $y \in \{0, 1\}$ が得られる確率が上問の $p_{Y|X}(y|x)$ で与えられるような離散無記憶通信路についてその通信路容量を与えなさい。
2. 状態集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ をもつ定常マルコフ連鎖の遷移確率 P (次の状態が x' | 現在の状態が x) が, $0 < \alpha, \beta < 1$ をパラメータとして,

$x \backslash x'$	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	$1 - \alpha$	0	α	0
2	$1 - \beta$	0	0	β
3	1	0	0	0

の要素として与えられるマルコフ連鎖について,

- (a) 状態遷移図を描け。
 (b) 定常確率分布を計算せよ。
 (c) エントロピー (レート) を計算せよ。
3. 入力記号 $x \in \{0, 1\}$ に対して出力記号 $y \in \{0, 1\}$ が得られる確率 $p_{Y|X}(y|x)$ が下表のように与えられるような離散無記憶通信路についてその通信路容量を考える。ただし, $0 \leq \epsilon \leq 1$ と $0 \leq \mu \leq 1$ は任意のパラメータとする。

$x \backslash y$	0	1
0	$1 - \epsilon$	ϵ
1	μ	$1 - \mu$

- (a) 出力確率分布は $p_Y(1) = q$ をパラメータとして $\{1 - q, q\}$ として表される。通信路容量を達成する入力確率分布に対応して決まる q が満たす方程式を書け。
 (b) $\epsilon = 0, \mu = 1/3$ と設定する。通信路容量を求めなさい。(上の問いとは独立に計算してもよい。)
4. X, Y は独立な二元確率変数とする。二元確率変数 Z は X, Y の関数であるとする。 X, Y, Z の同時確率分布の (X, Z) に関する周辺 (同時) 確率分布は

$$p_{XZ}(0, 0) = 1/4, p_{XZ}(0, 1) = 1/4, p_{XZ}(1, 0) = 1/3, p_{XZ}(1, 1) = 1/6$$

であるとする。このとき以下の情報量を計算せよ。導出過程も述べること。

- (a) $I(X; Y)$
 (b) $I(X, Z; Y)$