

最適化理論 期末試験 問題

平成18年8月1日

注意事項

自筆の A4 サイズの紙一枚のみ持込み可である。コピーは不可。その紙は学籍番号と名前を書いて答案用紙と一緒に提出すること

I. 2006 年秋, あるワイナリーは, 自社の畑でカベルネ・ソーヴィニヨン (CS), メルロー (ML), カベルネ・フラン (CF) の 3 種類のブドウを収穫した。それぞれからワインをつくと, CS 100kl, ML 80kl, CF 30kl のワインができた。これらのワインを次の 3 種類のブレンドにして売ることになった。

ブレンド名	CS	ML	CF	値段 (万円/kl)
A	0.8	0.1	0.1	100
B	0.2	0.6	0.2	90
C	0.4	0.5	0.1	70

各数字はブレンドの割合, 右端の欄は, それぞれのブレンドの売値を表す。なお, 上記ブレンド以外は売らないことにした。このとき, 以下の質問に答えよ。なお, このワイナリーのワインは人気なので, 売れ残る心配はないものとする。

- ブレンド A, B, C の生産量をそれぞれ x_1, x_2, x_3 とする。上の条件のもとで, 売り上げを最大にする生産量 (x_1, x_2, x_3) を求める問題を, 線形計画問題に定式化せよ。ただし, 不等式標準形で表現すること。この問題を (P) とする。
- (P) の双対問題 (D) を求めよ。
- (P) にスラック変数 x_4, x_5, x_6 を導入し, 等式標準形に変換せよ。
- 上で導入したスラック変数を基底変数とする辞書と対応する基底解を求めよ。
- この辞書に対する単体法を考える。最初に x_2 を基底変数に入れるとする。このとき基底変数からはずすべき変数は何か。
- 単体法を続けていき, 次の辞書を得た:

$$\begin{aligned} z &= -19050 + 80x_4 + 5x_5 + 355x_6 \\ x_1 &= 85 - x_4 + 1.5x_5 + 3.5x_6 \\ x_2 &= 90 + x_4 + x_5 + 9x_6 \\ x_3 &= 35 - x_4 - 3.5x_5 + 11.5x_6 \end{aligned}$$

実はこの辞書は最適辞書である。なぜ最適であるとわかるのか, 説明せよ。

- 結局, それぞれのブレンドをどれだけ作れば良いのか。またそのときワイナリーの売り上げはいくらになるか, 応えよ。
- (D) の最適値は何か。
- (D) の最適解を求めよ。
- あるワイン製造業者が, このワイナリーの CS, ML, CF のワインを, ブレンドしないでそのまま全部購入することを考えている。このとき, (D) の最適解 (y_1^*, y_2^*, y_3^*) に対して CS に y_1^* 万円/kl, ML に y_2^* 万円/kl, CF に y_3^* 万円/kl の値段をつけるのが, ある種合理的な考え方となっている。どう合理的なのか説明せよ。

II. 次の線形計画問題の双対問題を求めよ。ただし, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ で, 変数は $x \in \mathbb{R}^n$ と $u \in \mathbb{R}^m$ である。

$$\begin{aligned} \min. \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax + u = b \\ & x \geq 0, u \geq 0. \end{aligned}$$

III. 次の事柄について各々 10 行程度で説明せよ。ただし, 括弧内のキーワードを入れること。

- 最短経路問題の線形計画問題への定式化 (双対問題, 整数解)
- ゼロ和行列ゲーム (支払い行列, 均衡解, 線形計画問題)

以上