

最適化理論 期末試験 問題

平成21年7月26日

I. 以下の3つの線形計画問題の双対問題をそれぞれ求めよ。ただし変数は x と y である。また、 $\langle P_1 \rangle$, $\langle P_2 \rangle$, $\langle P_3 \rangle$ の最適値に関してわかることを述べよ。

$$\begin{aligned} \langle P_1 \rangle & \begin{cases} \text{最小化} & c^T x \\ \text{条件} & Ax \leq b, x \geq 0 \end{cases} & \langle P_2 \rangle & \begin{cases} \text{最小化} & b^T y \\ \text{条件} & A^T y \geq -c, y \geq 0 \end{cases} \\ \langle P_3 \rangle & \begin{cases} \text{最小化} & c^T x + b^T y \\ \text{条件} & Ax \leq b, A^T y \geq -c, x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$(c \ b)^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -b \\ -c \end{pmatrix}$

II. 次の0-1 整数計画問題 (ナップサック問題) $\langle IP \rangle$ を、動的計画法を用いて解け。

$$\langle IP \rangle \begin{cases} \text{最大化} & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ \text{条件} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 6 \quad (V=4) \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad (i=1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

III. 上記のナップサック問題 $\langle IP \rangle$ に対して、以下の問いに答えよ。

1. $\langle IP \rangle$ の LP 緩和問題 $\langle LP \rangle$ を書け。
2. $\langle LP \rangle$ の 双対問題 $\langle DLP \rangle$ を書け。
3. $\langle LP \rangle$ の最適解と $\langle DLP \rangle$ の最適解の間に成り立つ相補性条件を書き下せ。
4. $\langle LP \rangle$ の最適値 θ_{LP} と最適解を求めよ。
5. $\langle DLP \rangle$ の最適値 θ_{DLP} と最適解を求めよ。

IV.. 5つのノードを持つグラフにおいて、ノード i から j への距離が以下のように与えられているとする。ただし、 ∞ はつながっていないことを表す。また、 i から j へは一方通行とする。

\	1	2	3	4	5
1	0	1	2	5	∞
2		0	3	3	∞
3			0	∞	5
4				0	3
5					0

1. グラフを書きなさい。
2. ノード1からノード5に至る最短経路を求める線形計画問題 $\langle SP \rangle$ を書きなさい。
3. $\langle SP \rangle$ の双対問題 $\langle DSP \rangle$ を書きなさい。
4. $\langle DSP \rangle$ はどのような問題か、その意味について述べなさい。

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 25 \\ \hline 44 \\ + 17 \\ \hline 61 \end{array}$$