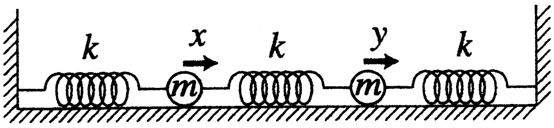
波動と光　中間テスト問題

問題用紙１枚、答案用紙１枚 (裏面使用可)

前の問題で与えられた式は (その問題が解答できていなくても) 用いてよい。

[1] 図のように、2 個の質量 m のおもりが 3 つのバネ定数 k のバネによって連結され、バネの端は壁に固定されている。静止位置ではバネは自然長から伸び縮みしていないとする。おもりは連結されている方向にのみ運動するとし、床との摩擦は無視する。それぞれのおもりの静止位置からの変位を x, y(右向きを正) とする。以下の問に答えよ。

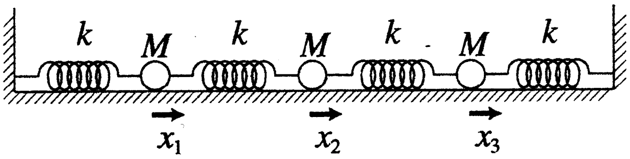


(1) x, y に対する運動方程式を求めよ。

(2) この系のモードの固有振動数と、各モードにおける $x(t), y(t)$ を求めよ。

(3) この系の振動の一般的な形 (一般解) を求めよ。

[2] 図のように、3 個の質量 M のおもりがバネ定数 k のバネによって連結され、バネの端は壁に固定されている。静止位置ではバネは自然長から伸び縮みしていないとする。おもりは連結されている方向にのみ運動するとし、床との摩擦は無視する。n 番目のおもりの静止位置からの変位を $x_n(t)$(右向きを正) とする。このとき、以下の手順で振動のモードを求めることを考える。(注：自由度 3 の連成振動は講義 3.1 節で行列を用いて解いたが、本問では、3.2 節でやった自由度 N の問題の解き方を $N = 3$ として用いる。)



(1) まず、x_1, x_2, x_3 に対する運動方程式 (3 つの微分方程式になる) を書け。次に、常に $x_0(t) = x_4(t) = 0$ であるような変数 x_0, x_4 を導入することにより、運動方程式が

$$M\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = -k[2x_n(t) - x_{n-1}(t) - x_{n+1}(t)] \qquad (n = 1, 2, 3)$$

と与えられることを示せ。

(2) モードを求めるために $x_n(t) = A_n \cos(\omega t + \phi)$ とおいて、A_n に対する方程式を導出せよ。

(3) $x_0(t) = 0$ より $A_0 = 0$ でなければならないことを考慮して、(2) で求めた A_n に対する方程式の解を $A_n = A\sin(pn)$ の形に仮定する。このとき、p と ω の間に

$$\omega^2 = \frac{k}{M}[2 - 2\cos p]$$

という関係が成立することを示せ。

(4) p は $0 < p < \pi$ の範囲で考えれば十分であることを示すことができる。このことを既知として、付帯条件 $x_4(t) = 0$ から、p の取り得る値を求めよ。(取り得る p は 3 つあり、それぞれがモードの波数である。)

(5) 以上より、各モードの固有振動数、および各モードにおける A_2/A_1、A_3/A_1 を求めよ。(最終の答には三角関数の記号は用いないこと。)

[3] $x=0$ と $x=L$ で固定された長さ L の弦の振動を考える。

(1) 弦上の位置 x、時刻 t における静止位置からの変位を $u(x,t)$ と書くとき、弦の振動の m 番目のモードは

$$u(x,t) = A\sin(p_m x)\cos(\omega_m t) \qquad \text{(A)}$$

と書ける。$p_m = m\pi/L \quad (m=1,2,3,\cdots)$ である。式 (A) が振動のモードを表していることはどこからわかるか、答えよ。

(2) 式 (A) が波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (v\text{ は正の定数})$$

を満足するとき、分散関係 (ω_m と p_m の関係) を求めよ。

(3) 時刻 $t=0$ で弦が静止していたとするとき、変位の一般解は

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(p_m x)\cos(\omega_m t) \qquad \text{(B)}$$

と書ける。ただし、A_m は未定定数である。式 (A) が波動方程式を満足するとき、上記の一般解 (B) もまた波動方程式を満足する。これは何という原理に基づいているか、答えよ。

(4) 弦が時刻 $t=0$ で関数 $f(x)$ という形で静止しているとき、式 (B) の中の未定定数は

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(p_n x)dx \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

と定まる。これを既知として、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{L}x & (0 \le x \le \frac{L}{2}) \\ \frac{2a}{L}(L-x) & (\frac{L}{2} \le x \le L) \end{cases}$$

のときの $u(x,t)$ をモードに関する和の形で求めよ。ただし、

$$\int_0^{L/2} x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = -\frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\int_{L/2}^{L} (L-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{L^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

を既知としてよい。

(5) 問 (4) で得られた和の中で、振幅が 0 でないモードの固有振動数を小さいものから順に 3 番目まで書き並べよ。