波動と光　期末テスト問題

問題用紙１枚、答案用紙１枚 (裏面使用可)

必要があれば $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$、$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$、$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ を用いよ。

[1] 一次元の進行波

$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad (k > 0, \omega > 0) \qquad \text{(I)}$$

について以下の問に答えよ。右向きを $+x$ 方向とする。

(1) (I) 式の進行波は右向きに進む波か、左向きに進む波か、答えよ。

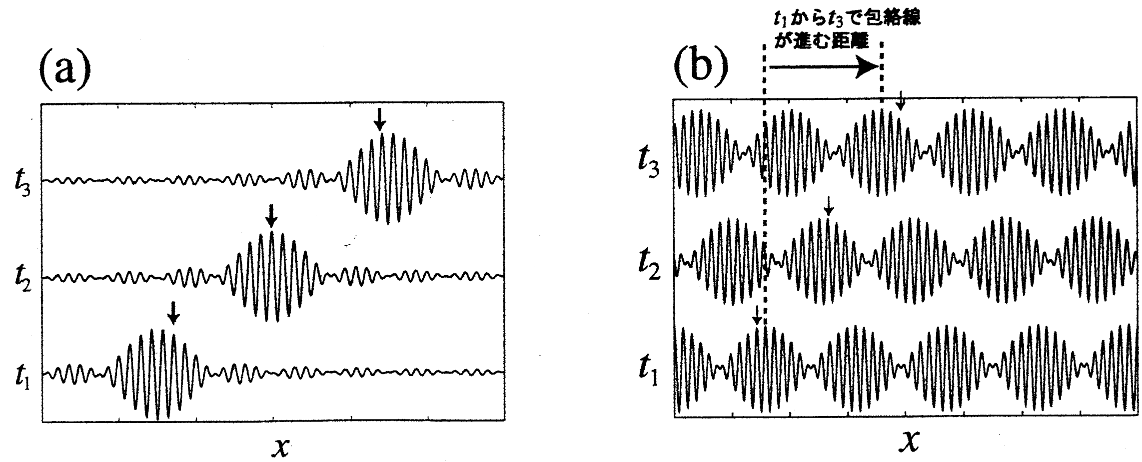
(2) (I) 式が波動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (v \text{ は正の定数})$$

を満足するとき、分散関係を求めよ。

(3) 問 (2) の分散関係があるとき、波の位相速度と群速度を求めよ。

[2] 以下の図は (a) 波束、および (b) うなりを伴った波が時間とともに移動していく様子を表している。時刻は $t_1 < t_2 < t_3$ とする。図中の↓は、包絡線内部の波長の短い波が同じ位相を持つ位置を、各時刻において表している。位相速度と群速度のどちらが大きいか、(a),(b) それぞれについて答えよ。



[3] 弦を伝わる一次元の波を考える。

(1) まず、一端 $x = 0$ が固定されている場合を考える。弦上 $x < 0$ を右向きに進行波

$$u(x,t) = A\sin(kx - \omega t - \phi)$$

が進んで来て、$x = 0$ で左向きに反射されるとき、入射波と反射波の重ね合わせによって生じる定在波を、二つの三角関数の積の形で求めよ。ただし、右向き入射波 $f(x - vt)$ に対する固定端 $x = 0$ による反射波は $-f(-x - vt)$ で与えられることを既知としてよい。

(2) 次に、$x = 0$ と $x = -L$ の両端が固定されている場合を考える。この弦に生じ得る振動のモードの波数を求めよ。(問 (1) の結果の振幅部分が $x = -L$ で 0 になるように k を決める。)

[4] x 方向に進む電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は一般に以下の式で与えられる。

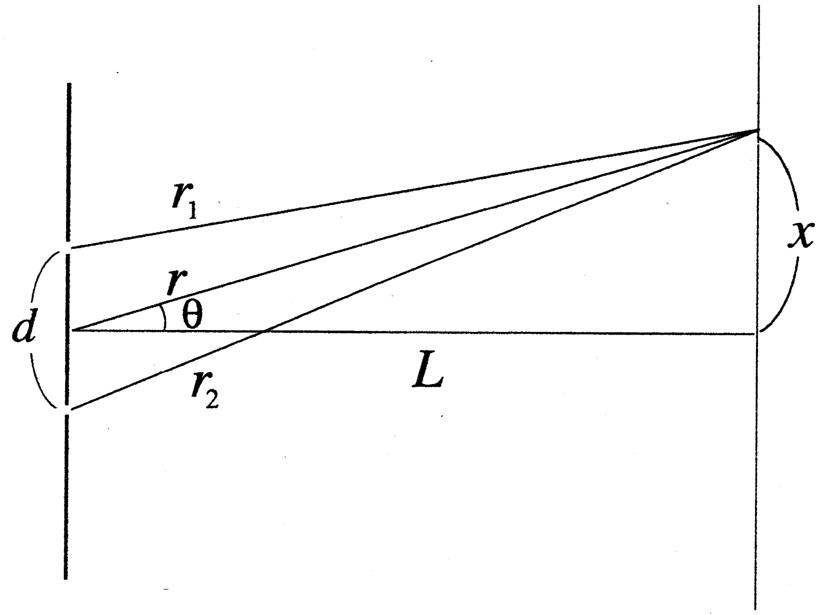
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= (0, E_0\cos(kx-\omega t-\phi), E_0'\cos(kx-\omega t-\phi')) \\ \boldsymbol{B} &= (0, -B_0'\cos(kx-\omega t-\phi'), B_0\cos(kx-\omega t-\phi))\end{aligned}$$

ただし、$B_0 = E_0/c$、$B_0' = E_0'/c$ を満たす。

(1) 上の式から電磁波が横波であることを説明せよ。

(2) $\phi = \phi' + \pi/2$ かつ $E_0 = E_0'$ を満たすとき、何偏光というか、答えよ。

[5] 波数 k, 振動数 ω の光が、平面波で入射してきて、幅の十分狭い二つのスリットを通り抜けてくる場合を考える。スリットから十分離れた位置にスクリーンをたてる。



(1) 2つのスリットからスクリーン上のある点までの距離を r_1 と r_2 とすると、スクリーン上では $\cos(kr_1-\omega t-\phi)$ と $\cos(kr_2-\omega t-\phi)$ の重ね合わせがおこると考えられる。重ね合わせた結果を二つの三角関数の積の形に表せ。

(2) スクリーン上で光が明るくなるための条件を r_1, r_2, k を用いて表せ。

(3) 図のように角度 θ をとると、$r_1 \simeq r - \frac{d}{2}\sin\theta$、$r_2 \simeq r + \frac{d}{2}\sin\theta$ と近似できる。$\theta \ll 1$ として、スクリーン上にできる縞模様の間隔を L, 波長 λ, d を用いて表せ。($\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$ と近似せよ。)