

以下の設問に、導出過程や理由を文章できちんと書いて答えられるように、またすべての式は、その式がどうして出てきたのか説明できるように勉強すること。気体定数、ボルツマン定数、アボガドロ定数、原子量等は教科書等を参照せよ。電卓使用可。参考までに一部に [答] を示したが、間違えている可能性もありうる。

1. 温度 T_2 の高温熱源と温度 T_1 ($T_1 < T_2$) の低温熱源の間で動作する熱機関が 1 サイクルの間に、高温熱源から熱量 Q_2 を受け取り、低温熱源に熱量 Q_1 を放出して、外に W の仕事をした。熱機関は 1 サイクルを終えてはじめの状態に戻っている。

(a) 熱力学第 1 法則と熱力学第 2 法則を式で表せ。

(b) 熱機関の熱効率の定義を述べよ。

(c) 熱力学第 1 法則と熱力学第 2 法則の式を用いて、熱効率 η の値が取りうる範囲を T_1 、 T_2 を使って表せ。

[答] $\eta \leq 1 - (T_1/T_2)$

2. 次の表は 300 K と 250 K の熱源の間で動作する冷却器が 1 サイクルの間に低温熱源から取り去る熱量 Q_1 、高温熱源へ排出する熱量 Q_2 、外部から与える仕事 W を J の単位で表したものである。以下に理由を述べて記号で答えよ (理由が正しくなければ正解と認めない)。

(a) 熱力学第 1 法則に反するサイクルはどれか。

[答] イ

(b) 熱力学第 1 法則には反しないが第 2 法則に反するサイクルはどれか。

[答] ア

(c) 可逆サイクルはどれか。

[答] ウ

(d) 不可逆サイクルはどれか。

[答] エ, オ

記号	Q_2	Q_1	W
ア	800	700	100
イ	700	500	100
ウ	600	500	100
エ	500	400	100
オ	400	300	100

3. 以下の問に答えよ。

(a) 0°C の氷 1 kg が 0°C の水になるときのエントロピーの増加。氷の融解熱は $80 \text{ cal/g} = 336 \text{ J/g}$ である。

[答] $1.23 \times 10^3 \text{ J/K}$

(b) 一定圧力のもとに 1 mol の空気の体積が 4 倍になった。気体のエントロピーはどれだけ増加あるいは減少したか。空気の状態変化は理想気体と同じであると考えよ。

[答] 40 J/K

4. 温度 T_0 の環境の中に温度 T 、熱容量 C の物体がある。

(a) この物体から環境に熱が伝わり物体の温度が環境の温度に等しくなった。物体のエントロピーの減少量 ΔS を求めよ。

[答] $\Delta S = C \log(T/T_0)$

(b) 物体が環境の温度に等しくなるまでに物体から出ていく熱量で可逆的熱機関を動かすとする。このとき得られる仕事 W は次の式で与えられることを示せ。

$$W = C(T - T_0) - CT_0 \Delta S$$

(c) 温度 97°C 、質量 1 kg の水が温度 17°C の環境中に置かれている。水の温度が環境の温度になるまでに取り出しうる最大仕事を求めよ。それは 90°C の水から出ていった熱量の何% に当たるか。水の比熱は $4.2 \text{ J/g}\cdot\text{K}$ とする。

[答] 約 39 kJ, 約 12%

5. ある気体の状態方程式が次の式で表される。

$$pV = aT - bT^2$$

ただし a と b は定数である。圧力が一定のもとに温度が T_1 から T_2 までかわるとき気体によってなされる仕事 W を求めよ。

[答] $a(T_2 - T_1) - b(T_2^2 - T_1^2)$

6. 以下の問に答えよ。

(a) 定積比熱が $0.31 \text{ J/g}\cdot\text{K}$ の気体がある。比熱比は $5/3$ である。この気体の分子量を求めよ。分子 1 個の質量を求めよ。 [答] 分子量 40, 分子 1 個の質量 $6.6 \times 10^{-26} \text{ kg}$

(b) 室温における水の分子の比熱比が約 $4/3$ であるわけを説明せよ。

(c) 温度 300 K の空気中にあるエチルアルコール ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$) の分子 (1 個) がもつ並進運動エネルギーの平均値を求めよ。 [答] $6.2 \times 10^{-21} \text{ J}$

(d) エチルアルコール分子の 2 乗平均速度 (root-mean-square velocity) を求めよ。 [答] 403 m/s

(e) 300 K における酸素分子の 2 乗平均速度を求めよ。 [答] 484 m/s

(f) ヘリウム原子の 2 乗平均速度が上で求めた (300 K における) 酸素分子の 2 乗平均速度に等しいという。温度を求めよ。 [答] 37.5 K

(g) 酸素分子 1 個のもつ並進運動の運動エネルギーは、高低差 1 m の位置エネルギーの何倍か。

[答] 1.2×10^4 倍

(h) 室内の空気の分子が重力を受けても落下しないわけを述べよ。

7. 状態方程式 $pV = nRT$ から出発して、 1 atm , 300 K の理想気体 1 l 中にある分子の数を計算せよ。

8. 25 個の分子の速さが右表のように分布している。平均速度と 2 乗平均速度を計算せよ。

[答] 平均速度 3.28 m/s , 2 乗平均速度 3.46 m/s

分子数	速度 (m/s)
2	1.0
4	2.0
7	3.0
9	4.0
3	5.0

9. 速さが 0 から v_0 の範囲に分子が一様に分布していると仮定する。平均速度と 2 乗平均速度を求めよ。

[答] 平均速度 $v_0/2$, 2 乗平均速度 $v_0/\sqrt{3}$

10. 右図は温度 (T)-エントロピー (S) 図におけるサイクルである。

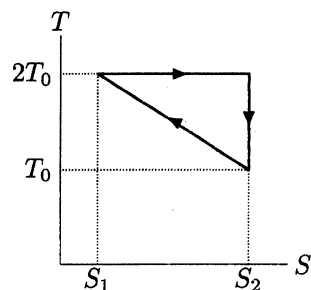
(a) T - S 図における状態変化を p - V 図に表せ。

(b) 高温熱源から吸収する熱量はどれほどか。

(c) 1 サイクルの間にする仕事はどれほどか。

(d) 熱効率を求めよ。

[答] 25%



11. 箱の体積を右半分と左半分に分け、 N 個の分子を左右に振り分ける。 n 個の分子を左半分へ、 $N - n$ 個を右半分へ振り分ける配り方の数 (微視的状态の数) $W(n, N - n)$ は $W(n, N - n) = \frac{N!}{n!(N - n)!}$ と表される。はじめ $N = 10$ 個のすべてが左半分にあった。以下に答えよ。

(a) 3 個が右半分に移った。エントロピーの増加を求めよ。

[答] $6.6 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

(b) さらに 2 個が右半分に移って左右同じ数になった。前問からのエントロピーの増加を求めよ。

[答] $1.0 \times 10^{-23} \text{ J/K}$

12. 前問において $N = 100$ とする。 $W(100, 0) = 1$ である。 $W(50, 50)$ を Stirling の公式

$$\log N \cong N (\log N - 1) + \frac{1}{2} \log(2\pi N)$$

を用いて計算し、分子が左右に 50 個ずつ入る確率は 100 個がすべて左半分に入る確率の何倍か求めよ。

[答] 1.0×10^{29} 倍

微視的状态の総数は 2^{100} 個ある。このひとつひとつの状態は等確率で起こる。各状態が 1 ns (10^{-9} s) 毎に入れ替わるとして 2^{100} 個の状態のすべてが 1 回ずつ実現するのに必要な時間は何年か。

[答] 4×10^{13} 年、宇宙の年齢 (約 100 億年) の 4000 倍

参考: このくらいの時間の間に 1 ns だけ 100 個がすべて左側にかたよることがあってもよいわけである。たった 100 個でもこうである! まして 1 mol (6×10^{23} 個) ともなれば …。