$\boxed{1}$ 数学的確率の公理：

1. A を標本空間 Ω の中の任意の事象とすれば $0 \leqq P(A) \leqq 1$；
2. 標本空間（全事象）Ω に対しては $P(\Omega) = 1$；
3. A, B をたがいに排反な事象 $(A \cap B = \emptyset)$ とすれば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

から，確率 P は次の性質をみたすことを示せ．

(1) 事象 A, B が $A \subset B$ であるなら

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$$

したがって

$$P(A) \leqq P(B)$$

ここで，$A^c = \Omega - A$ は A の余事象である．

(2) 事象 A とその余事象 A^c に対して

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

(3) 事象 A, B に対して

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\boxed{2}$ 確率変数 X の分布関数を $F_X(x)$，その平均を μ，分散を σ^2 $(\sigma > 0)$ とする．X の 1 次変換 $Y = aX + b$ （$a \neq 0, b$ は定数）を考えるとき，次の問に a, b, μ, σ^2 等を使って答えよ．

(1) Y の平均 $E(Y)$ を求めよ．

(2) Y の分散 $V(Y)$ を求めよ．

(3) $E(Y) = 0, V(Y) = 1$ となるような 1 次変換 $Y = aX + b$ を求めよ．

$\boxed{3}$ 確率ベクトル (X, Y) の同時確率密度関数が

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} e^{-(2x+y/2)} & (x > 0,\ y > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられるとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) (X, Y) の同時分布関数 $F_{(X,Y)}(x, y)$ を求めよ．

(2) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$ および Y の周辺確率密度関数 $f_Y(y)$ を求めよ．

(3) X と Y は独立か否か．理由を述べて答えよ．

(4) X のモーメント母関数 $M_X(t) = E(e^{tX})$ を求めよ．ただし $t < 2$ とする．

(5) X の平均 $E(X)$, 分散 $V(X)$ を求めよ．

$\boxed{4}$ 正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ について，以下の設問に答えよ．なお，$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は次で与えられる：

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (-\infty < x < \infty).$$

(1) $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき，X のモーメント母関数 $M_X(t) = E(e^{tX})$ は

$$M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2}{2} t^2\right\}$$

であることを示し，これより平均 $E(X)$, 分散 $V(X)$ を求めよ．

(2) 確率変数 X_1, X_2 は独立で，$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする．$Y = X_1 + X_2$ を考えるとき，

(i) Y のモーメント母関数 $M_Y(t) = E(e^{tY})$ を求めよ．

(ii) $M_Y(t)$ を利用して，Y のしたがう分布を求めよ．

$\boxed{5}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は正規母集団 $\mathrm{N}(\mu, \sigma_0^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする．ただし，$\mu \in (-\infty, \infty)$ は未知の母数，σ_0^2 は既知の値である．このとき以下の問に答えよ．(正規分布の確率密度関数については問題 $\boxed{4}$ 参照.)

(1) μ に関する尤度関数 $L(\mu; X_1, X_2, \ldots, X_n)$ および対数尤度関数 $l(\mu; X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を求めよ．

(2) μ の最尤推定量 $\hat{\mu}_n = \hat{\mu}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を求めよ．

(3) 各 μ のもと，$\hat{\mu}_n$ の平均 $E_\mu(\hat{\mu}_n)$ を求めよ．

(4) 各 μ のもと，$\hat{\mu}_n$ の分散 $V_\mu(\hat{\mu}_n)$ を求めよ．