

2004年度 前学期 線形代数学第一 期末試験
夜間主コース CEFT クラス 水曜7限 (山田)

結論は指定した解答欄に書くこと。解く過程・解法 も採点します。解法の要点を記述すること。

1 正方行列 A が逆行列をもつ ことと同値な条件にはいろいろなものがあつた。以下のそれぞれの観点について... の部分にふさわしい条件を述べよ。

- (1) A の行列式 $\det(A)$ について, ...
- (2) A の階数 $\text{rank}(A)$ について, ...
- (3) 連立方程式 $Ax = 0$ の解が, ...
- (4) A を行変形で簡約化した行列が, ...

2 次のように行列 D と 変数ベクトル x を定める。

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 6 \\ -6 & -6 & -10 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

そして、実数 t に対して $D(t) = D - tI$ とする (I は単位行列)。

- (1) 行列 $D(t)$ の行列式 $\det D(t)$ を t の式で表せ。因数分解すること。
- (2) 行列 $D(t)$ が 逆行列を持たないための t の値を全て求めよ。
- (3) 前問 (2) で得るそれぞれの値 $t = a_1, a_2, \dots$ ($a_1 < a_2 < \dots$ とする.) に対して、行列 $D(a_i)$ の階数 ($\text{rank}(D(a_1)), \text{rank}(D(a_2)), \dots$) を求め、 x に関する方程式

$$D(a_1)x = 0, \quad D(a_2)x = 0, \quad \dots$$

を解け。ここで、 0 はゼロベクトルとする。

3 行列 A は 7次正方行列 で、その行列式は -2 である： $\det(A) = -2$.

このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) A を 2 倍した行列 $2A$ の行列式 ($\det(2A)$) を答えよ.
- (2) A の 3 乗 A^3 の行列式 ($\det(A^3)$) を答えよ.
- (3) A の転置行列 tA の行列式 ($\det({}^tA)$) を答えよ.
- (4) A の第 3 列から第 7 列までを逆順 (つまり左から 1, 2, 7, 6, 5, 4, 3 の順) に
ならべ変えた行列 A' の行列式 ($\det(A')$) を答えよ.
- (5) A の第 1 行を第 7 行と同じ行ベクトルに取りかえた行列 A'' の行列式
($\det(A'')$) を答えよ.

4 以下のように n 次正方行列 A_n と 6 項変数ベクトル $\mathbf{x}$, 6 項ベクトル $\mathbf{b}$ を定める. (A は対角成分が 2, そのとなりが 1 で他は 0) 以下の問いに答えよ.

$$A_n := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 行列 A_3 の逆行列を求めよ.
- (2) A_n の行列式 $\det(A_n)$ を a_n ($n \geq 4$) とおく. a_n が漸化式 $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$
をみたすことを示した上で, a_n を n の式で表せ.
- (3) 連立方程式 $A_6\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解 $\mathbf{x}$ の第 4 成分 x_4 を求めよ.

以上