

'05 線形代数学第一 (水)

[1] 次の行列 A, B について, $A+B, AB, BA$ がそれぞれ定義されているかどうかを述べ, 定義されている場合には計算結果を記せ.

$$(i) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad (ii) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(iii) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (iv) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

[2] 問題 [1] の (i) ~ (iv) の行列 A, B について, $A^{-1}B, AB^{-1}$ がそれぞれ定義されているかどうかを述べ, 定義されている場合には計算結果を記せ.

[3] 次の行列の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 15 & 18 & 4 \end{bmatrix}$$

[4] 次の行列 A について, (1) 簡約化せよ. (2) 階数を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 11 & 14 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 24 & 30 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 11 & 21 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 11 & 14 \end{bmatrix}$$

[5] 問題 [4] の行列 A について, ベクトル $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$ に関する連立 1 次方程式 $Ax = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ は解

を持つかどうかを述べ, 解があれば求めよ.

[6] 関数を成分にもつ 2×2 行列の行列式で与えられる関数

$$F(t) = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix}$$

について,

$$F'(t) = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{vmatrix}$$

を証明せよ.