'05 線形代数学第二（2006.2.6 月）

$\boxed{1}$ ベクトル空間 $V$ とその部分集合 $W$ を次のようにとるとき，$W$ が $V$ の部分空間であるかどうかを理由とともに述べよ．

(i) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \ x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$

(ii) $V = \mathbb{R}[x]_2$, $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(1) = 1 \}$

$\boxed{2}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(i) $V = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \}$ とするとき $\dim(V)$ を求めよ．

(ii) 上の (i) の $V$ の基底の例を示せ．

(iii) $W = \{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 | \ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ が有る．$\}$ とするとき $\dim(W)$ を求めよ．

(iv) 上の (iii) の $W$ の基底の例を示せ．

$\boxed{3}$ 線形写像 $T : \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}[x]_3$ を

$$T(f(x)) = f'(x)$$

で定義する．次の問に答えよ．

(i) $\mathbb{R}[x]_4$ の基底を $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}$，$\mathbb{R}[x]_3$ の基底を $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ としたときの $T$ の表現行列を求めよ．

(ii) $\mathbb{R}[x]_4$ の基底を $\{1+x,\ x+x^2,\ x^2+x^3,\ x^3+x^4,\ x^4\}$，
$\mathbb{R}[x]_3$ の基底を $\{1-x,\ x-x^2,\ x^2-x^3,\ x^3\}$ としたときの $T$ の表現行列を求めよ．

$\boxed{4}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(i) $A$ の固有多項式 $f_A(\lambda)$ を求めよ．

(ii) $f_A(\lambda) = 0$ の根を求めよ．

(iii) $T_A :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義するとき，$T_A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(iv) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 $P$ を求めよ．またそのときの $P^{-1}AP$ を求めよ。