'05 線形代数学第二（2006.2.15 水）

$\boxed{1}$ ベクトル空間 V とその部分集合 W を次のようにとるとき，W が V の部分空間であるかどうかを理由とともに述べよ．

(i) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \ x_1 + 3x_2 = 1 \right\}$

(ii) $V = \mathbb{R}[x]_2$, $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(1) = 0 \}$

$\boxed{2}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(i) $V = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 | \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \}$ とするとき $\dim(V)$ を求めよ．

(ii) 上の (i) の V の基底の例を示せ．

(iii) $W = \{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 | \ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ が有る.$\}$ とするとき $\dim(W)$ を求めよ．

(iv) 上の (iii) の W の基底の例を示せ．

$\boxed{3}$ 線形写像 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$ を

$$T(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$$

で定義する．次の問に答えよ．

(i) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底を $\{1, x, x^2\}$, $\mathbb{R}[x]_3$ の基底を $\{1, x, x^2, x^3\}$ としたときの T の表現行列を求めよ．

(ii) $\mathbb{R}[x]_2$ の基底を $\{1 + x, x + x^2, x^2\}$,
$\mathbb{R}[x]_3$ の基底を $\{1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3\}$ としたときの T の表現行列を求めよ．

$\boxed{4}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(i) A の固有多項式 $f_A(\lambda)$ を求めよ．

(ii) $f_A(\lambda) = 0$ の根を求めよ．

(iii) $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義するとき，T_A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(iv) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ．またそのときの $P^{-1}AP$ を求めよ．