

線形代数学第一 (金曜 4)

1 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 & +2x_3 & +3x_5 & +4x_6 & = & 5 \\ x_1 & +x_2 & +8x_3 & & +10x_5 & +12x_6 & = & 14 \\ 2x_1 & +x_2 & +10x_3 & +x_4 & +23x_5 & +27x_6 & = & 31 \\ x_1 & +2x_2 & +14x_3 & & +17x_5 & +20x_6 & = & 23 \end{cases}$$

について次の問にこたえよ.

(1) 拡大係数行列を書け.

(2) 拡大係数行列の簡約化を求めよ.

(3) 係数行列の階数および拡大係数行列の階数を求めよ.

(4) 解があるかどうかを述べよ. 解があれば解を求めよ.

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 & & & \\ 1 & 1 & 8 & 0 & 10 & 12 & 14 & & & \\ 2 & 1 & 10 & 1 & 23 & 27 & 31 & & & \\ 1 & 2 & 14 & 0 & 17 & 20 & 23 & & & \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 & & & \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 7 & 8 & 9 & & & \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 10 & 11 & 12 & & & \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right]$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2C_1 - 3C_3 - 4C_2 \\ 9 - 6C_1 - 7C_2 - 8C_3 \\ C_1 \\ 12 - 10C_2 - 11C_3 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

2 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 6 & 2 & 9 & 12 & 10 & 11 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ.

(1) σ を巡回置換の積に分解せよ. $(1\ 4\ 8\ 12)(2\ 3\ 5\ 6)(7\ 9\ 10\ 11)$

(2) $\text{sgn}(\sigma)$ を求めよ. $(-1)^9 = -1$

3 次の行列について, (1) 行列式を求めよ. (2) 逆行列を求めよ. (3) 余因子行列を求めよ.

(1) -28

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -28 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 84 & -56 & 0 \\ 0 & 0 & -70 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

4 3 次の正方列 A, B が条件 ${}^tA = A, {}^tB = -B$ をみたすとする.

$$A+B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{9}{2} & 6 \\ \frac{9}{2} & 6 & \frac{15}{2} \\ 6 & \frac{15}{2} & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

となるように A, B を定めよ.

5 奇数次の正方行列 T が条件 ${}^tT = -T$ をみたすとき, $\det(T) = 0$ を証明せよ.

6 次の行列式の値を計算せよ.

-96

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$