離散数学試験問題

2003年2月19日

問1 以下の問に答えよ。ただし、α, β, γ は命題論理式、A, B, C は集合とする。

(1) $(\alpha \to \beta) \land \neg\gamma$ を真理値表で表わせ。

(2) 式変形により以下の式を証明せよ。

$$((A - B) - C)^c = A^c \cup B \cup C$$

問2 普遍集合を $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ とする。次の論理式が真か偽かを答えよ。また、その理由を簡単に述べよ。ただし、$P(x, y)$ を「$x > y$」、$Q(x, y, z)$ を「$xy \leq z$」とする。

(1) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

(2) $(\exists x)(\forall y)(P(x, 0) \land Q(x, y, y))$

問3 (1) 以下の関数 f, g および $g \cdot f$ のそれぞれに対し、単射であるか否か、全射であるか否かを答えよ。その理由も簡単に説明せよ。ただし、Z は整数の集合、$g \cdot f(x) = g(f(x))$ である。

$$f : Z \to Z,\ f(x) = x - 1$$
$$g : Z \to Z,\ g(x) = x^2$$

(2) 関数 f が全射、関数 g が単射であるとする。このとき、$g \cdot f$ が常に全射あるいは単射となるかどうかを答えよ。その理由も簡単に説明せよ。

問4 $A = \{1, 2, 3\}$ とする。$A \times A$ 上の対応 R を、$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$ と定める。

(1) R が同値関係である（反射律、対象律、推移律を満たす）ことを示せ。

(2) R の同値類の個数を答えよ。

問5 2個の黒い石と n 個の白い石を一列に並べる。異なる並べ方がちょうど $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 通りあることを、n に関する数学的帰納法を用いて証明せよ。ただし、1個の黒い石と n 個の白い石を列に並べる並べ方が $n + 1$ 通りあることを用いてよい。

注：試験の結果により、一部の者にレポートを課する可能性がある。遅くとも来週中には、西9号館1階に掲示を出すので、注意しておくこと。