電磁気学第二演習（B）－中間試験－　解答例

1．中心角 θ の円弧がその中心に作る磁束密度の大きさは，同一半径の円形コイルがその中心に作る磁束密度の大きさに中心角の比，$\theta/(2\pi)$，を考慮することで得られる。また，直線回路が作る磁束密度はビオ・サバールの法則から求められる。
以上のことを問題の回路を構成するパーツ毎に実行する。

まず，半径 a の円弧部分がその中心 P に作る磁束密度について。
半径 a の円電流 I がその中心に作る磁束密度の大きさは

$$\frac{\mu_0 I}{2a}$$

だから，半径が a で中心角 θ の円弧がその中心に作る磁束密度の大きさ B_1 は

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2a}\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi a}$$

である。その方向は，電流の向きを考慮すると，図の紙面に垂直で向こうから手前向きに紙面を貫く方向である。

次に，半径 b の円弧部分がその中心 P に作る磁束密度について。
前項と同様の考察より，半径が b で中心角 θ の円弧がその中心に作る磁束密度の大きさ B_2 は

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2b}\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi b}$$

であり，その方向は，電流の向きを考慮すると，図の紙面に垂直で手前から向こう向きに紙面を貫く方向である。

直線部の電流素片は，いずれも観測点 P と素片を結ぶ方向と平行になっているので，ビオ・サバールの法則より，観測点に磁束密度を作らない。

以上より，求める磁束密度 B は上記 B_1 と B_2 の合成となり，両者が逆方向を向いていることと，図より $a < b$ であるから $B_1 > B_2$ となることを考慮して，

$$B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi a} - \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi b} = \underline{\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \underline{\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi}\frac{b-a}{ab}}$$

である。方向は <u>紙面に垂直で向こうから手前向きに紙面を貫く方向</u> である。

2．演習授業中の課題 ２－３ と同一。「演習略解（B）2–3」を参照せよ。

3．1) 一様な電流の電流密度は電流が流れている領域の断面積 S で電流値を割った値，I/S であるから，断面積を求めると，

$$S = \pi a^2 - 2\left\{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\} = \frac{\pi a^2}{2}$$

よって電流密度の大きさ j は

$$j = \frac{I}{S} = \underline{\frac{2I}{\pi a^2}}$$

2) 空洞部分を埋めた状態の仮想導体については，座標原点 (0, 0) に中心を持ち観測点 P を通る半径 r の円を周回路 C_1 に選んで，図に向かって時計回りの周回積分方向でもってアンペアの法則を適用すると，

$$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n}\, dS = \mu_0 j \int_{\text{仮想導体の断面積}} dS = \mu_0 j\,(\text{半径}\,a\,\text{の円の面積})$$

となり，その最左辺は $2\pi r B_1$，最右辺は $\mu_0 \pi a^2 j$ となるので，

$$2\pi r B_1 = \mu_0 \pi a^2 j = \mu_0 \pi a^2 \frac{2I}{\pi a^2} \qquad \to \qquad \underline{B_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi r}}$$

方向は，<u>x 軸に平行でその正方向</u> である。

3) $y > 0$ の空洞部分に相当する仮想導体については，その仮想導体の中心 (0, $a/2$) に中心を持ち観測点 P を通る半径 $r - a/2$ の円を周回路 C_2 に選び，図に向かって反時計回りの周回積分方向でもってアンペアの法則を適用すると，

$$\oint_{C_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{n}\, dS = \mu_0 j \int_{\text{仮想導体の断面積}} dS = \mu_0 j\,(\text{半径}\,a/2\,\text{の円の面積})$$

となり，その最左辺は $2\pi(r - a/2)B_2$，最右辺は $\mu_0 \pi (a/2)^2 j$ となるので，

$$2\pi(r - a/2)B_2 = \mu_0 \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 j = \mu_0 \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{2I}{\pi a^2} \qquad \to \qquad \underline{B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(r - a/2)}}$$

方向は，<u>x 軸に平行でその負方向</u> である。

4) $y < 0$ の空洞部分に相当する仮想導体については，その仮想導体の中心 (0, $-a/2$) に中心を持ち観測点 P を通る半径 $r + a/2$ の円を周回路 C_3 に選び，図に向かって反時計回りの周回積分方向でもってアンペアの法則を適用すると，

$$\oint_{C_3} \vec{B}_3 \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_{S_3} \vec{j} \cdot \vec{n}\, dS = \mu_0 j \int_{\text{仮想導体の断面積}} dS = \mu_0 j\,(\text{半径}\,a/2\,\text{の円の面積})$$

となり，その最左辺は $2\pi(r + a/2)B_3$，最右辺は $\mu_0 \pi (a/2)^2 j$ となるので，

$$2\pi(r + a/2)B_3 = \mu_0 \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 j = \mu_0 \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{2I}{\pi a^2} \qquad \to \qquad \underline{B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(r + a/2)}}$$

方向は，<u>x 軸に平行でその負方向</u> である。

5) 上記 2), 3), 4) の結果を合成すれば問われている B が得られる。B_1 と B_2 および B_3 の方向が逆方向であることに留意して，

$$B = B_1 - B_2 - B_3 = \frac{\mu_0 I}{\pi r} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(r - a/2)} - \frac{\mu_0 I}{4\pi(r + a/2)}$$

$$= \underline{\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4(r - a/2)} - \frac{1}{4(r + a/2)}\right)}$$

$$= \underline{\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{2r^2 - a^2}{r(4r^2 - a^2)}}$$

方向は，<u>x 軸に平行でその正方向</u> である。