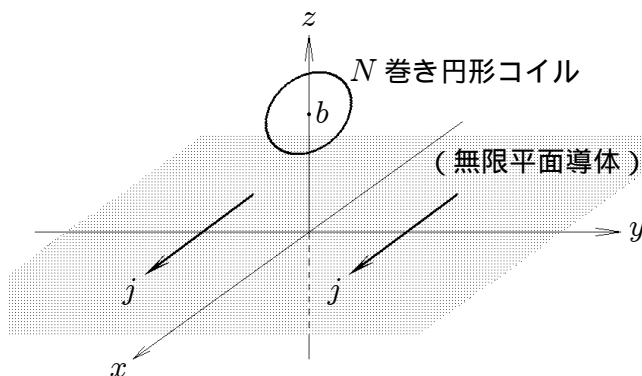


電磁気学第二演習 (B) - 期末試験 - 問題と解答例

1. 問題

xyz 座標の $z = 0$ の平面に薄い無限平面導体があり, 単位幅当たり j の強さの一様面電流が x 軸の正方向に流れているとする。

- (1) $z = a$ の点における磁界の強さ H とその向きを求めなさい。
- (2) 円形コイルを, コイル面が $y = 0$ の平面内にあってコイル中心が $z = b$ の場所となるように置く。コイルの面積を S , 巻き数を N とするとき, コイルに鎖交する磁束 Φ_m を求めなさい。ただし, コイル半径は b より小さいとする。(もし (1) が解けていない場合には, (1) の答えを $H = j/2$ としてこの問いに答えなさい。)
- (3) (2) の状態から, コイルを z 軸に平行な直径の周りに半回転させるとき, コイル導線上のある点を通る全電荷量 Q は幾らになるか求めなさい。ただし, コイルの全抵抗を R とする。



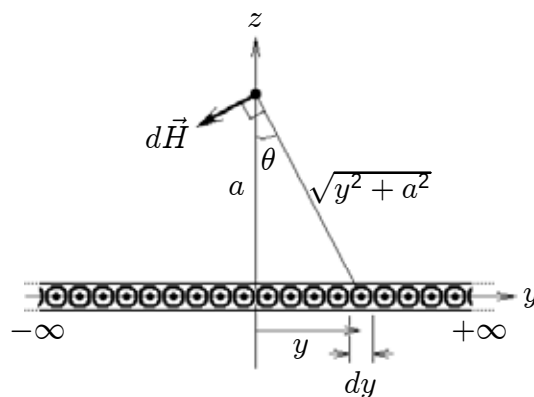
必要とあれば, 次の積分公式を利用して良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}$$

略解

- (1) 演習問題 7 - 1 で, 「幅が $2a$ で非常に薄い無限平面導体に流れる電流が作る磁束密度」という問題を経験している。今回のこの問題はその類題であり, 幅が無限に広がっている状態である。右図のように, x 軸から y の距離の dy の幅に注目し, この部分を x 軸に平行に $-\infty$ から $+\infty$ に流れる無限長直線電流とみなす。平面導体に流れている電流の単位幅当たりの値が j ということだから, その dy の幅には jdy の電流が流れていることになる。この dy 幅の無限長直線電流が z 軸上の a の場所に作る磁界の大きさ dH は, 拡張されたアンペアの法則から,

$$dH = \frac{jdy}{2\pi\sqrt{y^2 + a^2}}$$



で方向は右図に示すような方向である。

このような磁界を y の値を $-\infty$ から $+\infty$ まで変化させて合成すれば問われている磁界が得られるが, その合成時に個々の dH の z 成分は相殺して消えてしまう。したがって dH の y 成分のみに注目してスカラー加算すればよい。結局,

$$\begin{aligned} H &= \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} dH \cos \theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{jdy}{2\pi\sqrt{y^2 + a^2}} \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} \\ &= \frac{aj}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + a^2} = \frac{aj}{2\pi} \frac{\pi}{a} = \frac{j}{2} \end{aligned}$$

- (2) 上記 (1) の結果で分かるように、面電流が作る磁界の大きさは面電流からの距離には依存せず一定である。また、その磁界の向きは y 軸の負方向を向いていて、それも面電流からの距離には依存せず一定である。コイル面は題意から xz 面内にあるので、その磁界の向きとコイル面は垂直になっている。したがって、鎖交磁束 ϕ_m は、コイルの巻き数も考慮して、

$$\Phi_m = N\Phi = NBS = \mu_0 N H S = \frac{\mu_0 N j S}{2}$$

- (3) コイルが回転している途中の状態での、コイル面の法線方向と磁界方向の間の角を φ とすると、そのときの鎖交磁束 ϕ_m は、

$$\phi_m = NBS \cos \varphi = \mu_0 N H S \cos \varphi = \frac{\mu_0 N j S}{2} \cos \varphi$$

回転と共にこの鎖交磁束 ϕ_m が変化し、電磁誘導によって起電力 $U = -d\phi_m/dt$ が現れ、その起電力に応じた電流が抵抗 R のコイルに流れるので、その電流 I は、

$$I = \frac{U}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 N j S}{2R} \frac{d}{dt} (\cos \varphi) = \frac{\mu_0 N j S}{2R} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}$$

コイルの半回転の間にコイル導線を通過する電荷量 Q は、この電流値の半回転の間の時間積分だから、

$$Q = \int_{\text{半回転}} I dt = \int_{\text{半回転}} \frac{\mu_0 N j S}{2R} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 N j S}{2R} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 N j S}{R}$$

2. 問題

同一平面内に無限長直線導線と半径 a の 1 巻き円形コイルが固定されている。直線導線からコイルの中心までの距離は d であり、 $d > a$ である。

- (1) 直線導線に電流 I_1 を流したとき、円形コイルに鎖交する磁束 Φ_m を求めなさい。
- (2) (1) の状態のまま、円形コイルに電流 I_2 を流したとき、円形コイル全体が受ける力の大きさ F とその向きを求めなさい。ただし、直線導線や円形コイルは移動も変形もしないものとする。
- (3) 直線導線と円形コイルの間の相互インダクタンス M を求めなさい。

必要とあれば、次の積分公式を使用して良い。

$$\int_0^{2\pi} \frac{y \cos \theta}{x + y \cos \theta} d\theta = 2\pi \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) \quad (\text{ただし, } |x| > |y|)$$

略解

- (1) 演習問題 11 - 4 で「無限長直線電流と 1 巻き円形コイル間の相互誘導係数」の問題を解いたが、その途中段階で、無限長直線電流に電流を流した時の円形コイルの鎖交磁束を求めた。それと全く同じであり、詳細は省略する（「電磁気学第二演習 (B)-11 解答例」を参照せよ）。結局、鎖交磁束 ϕ_m は、

$$\begin{aligned} \Phi_m = \Phi &= \int_{\text{コイル断面}} B dS = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d + r \cos \theta)} r d\theta dr \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{d + r \cos \theta} \right] r dr = \mu_0 I_1 \int_0^a \frac{r}{\sqrt{d^2 - r^2}} dr \\ &= \mu_0 I_1 \left[-\sqrt{d^2 - r^2} \right]_0^a = \underline{\mu_0 I_1 (d - \sqrt{d^2 - a^2})} \end{aligned}$$

- (2) 演習問題 5 - 1 で解いた問題と全く同じであり，詳細は省略する（「電磁気学第二演習 (B)–5 解答例」を参照せよ）。電流を流す方向は指定されていないので，各自が自由に決めてよい。結局，力の大きさ F は，

$$\begin{aligned} F &= \left| \int_{\text{コイル全体}} dF \cos \theta \right| = \left| \int_{\text{コイル全体}} \frac{\mu_0 I_1 I_2 \cos \theta}{2\pi(d + a \cos \theta)} ds \right| \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \theta}{d + a \cos \theta} d\theta \right| \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left| \left[2\pi \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}} \right) \right] \right| = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{d^2 - a^2}} \end{aligned}$$

力の向きは，直線導線に流れる電流が円形コイル断面に作る磁界方向と，円形コイルに流れる電流が自分自身でコイル断面に作る磁界方向とが同じであれば，線路同士を引き付けあう方向の力であり，それらの磁界が逆方向であれば，線路同士が反発する方向の力である。

- (3) 演習問題 11 - 4 と全く同じ問題であり，上記 (1) で得られた鎖交磁束 ϕ_m を，それを作り出している電流値 I_1 で割ればよいので，

$$M = \frac{\phi_m}{I_1} = \frac{\mu_0 (d - \sqrt{d^2 - a^2})}{2}$$

3. 問題

半径 a の円形断面の無限長直線導体の単位長さ当たりの内部インダクタンス L を求めなさい。なお，導体の透磁率を μ とする。

略解

演習問題 11 - 2 の「同軸ケーブルの自己インダクタンス」の問題の中の，内部インダクタンスを求める部分と全く同じなので，詳細は省略する（「電磁気学第二演習 (B)–11 解答例」を参照せよ）。

導体の軸方向に I の一様電流を流したとすると，導体の単位長さ当たりに含まれる磁界エネルギー W_m は

$$W_m = \frac{\mu I^2}{16\pi}$$

となり，内部インダクタンス L は，

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu}{8\pi}$$

4. 問題

「アンペア・マクスウェルの法則」と「ガウスの法則」の 2 つの法則を考慮することにより，「電流電荷の連続式（電荷の保存則）」が導かれることを示しなさい。

略解

アンペア・マクスウェルの法則の微分形は，

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_e \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

であり，ガウスの法則の微分形は，

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_F \quad (2)$$

である。式 (1) の両辺の発散をとると，

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{j}_e + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (3)$$

であり，ベクトル解析の基本より，任意のベクトルの回転量には発散は無いから，

$$\text{式 (3) の左辺} = 0$$

また，式 (3) の右辺第 2 項の時間微分と空間微分は独立なので入れ替えが可能で，結局，式 (3) は，

$$\nabla \cdot \vec{j}_e + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = 0 \quad (4)$$

そして左辺第 2 項のカッコ内の $\nabla \cdot \vec{D}$ を式 (2) のガウスの法則で置き換えると，

$$\nabla \cdot \vec{j}_e + \frac{\partial \rho_F}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

となる。これは「電流電荷の連続式」に他ならない。